На правах рукописи

Брежнев Юрий Владимирович

Спектральные задачи с конечнозонным спектром. Тривиализация тэта-функциональных методов

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

01.04.02 — теоретическая физика

Томск

2012

Работа выполнена в национальном исследовательском Томском государственном университете

Научный консультант: БАГРОВ ВЛАДИСЛАВ ГАВРИИЛОВИЧ, доктор физико-математических наук, профессор, Томский государственный университет, заведующий кафедрой квантовой теории поля

Официальные оппоненты: БАБИЧ МИХАИЛ ВАСИЛЬЕВИЧ, доктор физико-математических наук, профессор, Санкт-Петербургское отделение математического института им. В. А. Стеклова, лаборатория математических проблем физики, ведущий научный сотрудник

БУХБИНДЕР ИОСИФ ЛЬВОВИЧ, доктор физико-математических наук, профессор, Томский государственный педагогический университет, заведующий кафедрой теоретической физики

ДУБРОВСКИЙ ВЛАДИСЛАВ ГЕОРГИЕВИЧ, доктор физико-математических наук, профессор, Новосибирский государственный технический университет, заведующий кафедрой прикладной и теоретической физики

Ведущая организация: Физический институт им. П. Н. Лебедева Российской Академии Наук, г. Москва

Защита состоится 7 *февраля* 2012 *г.* (*четверг*) *в* 14.30 *час.* на заседании диссертационного совета Д212.267.07 при федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего профессионального образования «Национальный исследовательский Томский государственный университет» по адресу: 634050, *г. Томск, пр-кт Ленина* 36, *ауд.* 119.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Томского государственного университета по адресу: г. Томск, пр-кт Ленина, 36а.

Автореферат разослан 11 декабря 2012 г.

Ученый секретарь диссертационного совета,
доктор физ.-мат. наук, профессор Ивонин И. В.

Актуальность темы

К важнейшим уравнениям теоретической физики принадлежат не только те, которые инвариантным образом описывают некоторую физику, но и редукции таких «больших» общековариантных уравнений. Чаще всего редукции определяются дополнительными симметриями и/или граничными условиями. К классическим примерам относятся аксиально симметричные уравнения Эйнштейна–Максвелла, уравнения главного кирального поля, инстантонные модели Янга–Милса, самодуальные редукции как этих уравнений, так и уравнений Эйнштейна, и многие другие. С другой стороны результаты редукций могут приводить к уравнениям, применимость и прикладная ценность которых может быть не меньше, а скорее больше, поскольку они часто оказываются «вездесущими» по части возникновения в других разнообразных физических проблемах. Самым обширным и универсально возникающим классом таких уравнений являются линейные дифференциальные уравнения. Например, упомянутые выше самодуальные уравнения Янга–Милса богаты настолько, что через их размерные редукции и выборы калибровочной группы получаются чуть ли не любые нелинейные уравнения, которые сейчас принято называть интегрируемыми[1]. Их связь с линейными уравнениями центральна, так как для них всегда имеется ассоциированная система линейных дифференциальных уравнений на вспомогательную функцию Ψ, условием совместности которой является данная нелинейная модель. Наличие произвольного параметра в таких уравнениях является широко распространенным фактом, а то что они линейны автоматически превращает их в спектральные задачи, часто определяемые обыкновенными дифференциальными уравнениями. Имеется даже гипотеза[2], что любая солитонная система может быть получена подходящей редукцией из уравнений Янга–Милса. Нетривиальная ситуация начинается с уравнений 2-го порядка $\Psi'' + p(x)\,\Psi' + q(x)\,\Psi = 0$.

Пожалуй ни одним уравнениям как теоретической, так и математической физики не посвящено столько статей и монографий как уравнениям этого вида, в число которых попадает и знаменитое стационарное 1-мерное уравнение Шрёдингера

$$-\Psi'' + u(x;\textit{параметры})\,\Psi = E\,\Psi. \qquad (*)$$

---

[1] Ablowitz M. J., Chakravarty S., Takhtajan L. *A Self-Dual Yang-Mills Hierarchy and its Reductions to Integrable System in* $1+1$ *and* $2+1$ *Dimensions*. Comm. Math. Phys. (1993) **158**, 289–314.

[2] Ward R. S. *Integrable and solvable systems and relations among them.* Phil. Trans. Royal Soc. (1985) **A315**, 451–457.

Громадное количество физических моделей сводится, прямо или косвенно, к уравнению $(*)$ или к спектральным задачам, определяемых скалярными или матричными уравнениями вида $\widehat{L}(u(x); \partial_x)\Psi = \lambda\Psi$; очень часто возникают и обобщения, называемые спектральным пучками $\widehat{L}(\lambda, u(x); \partial_x)\Psi = 0$. За редким исключением традиционная трактовка параметра λ как энергии $E = -\lambda$ является излишней и поэтому его обычно именуют просто как спектральный параметр.

Современное понимание этого круга задач неформально может быть охарактеризовано так, что нет особой разницы в интегрировании некоторого нелинейного «интегрируемого» автономного уравнения(й), или, с другой стороны, в интегрировании ассоциированных линейных уравнений с переменными коэффициентами (неавтономность) на Ψ-функцию. Более того, поскольку искомые поля $u(x)$ входят в линейные задачи как коэффициенты (потенциалы), «линейная» Ψ-функция в некотором отношении оказывается даже более фундаментальной, чем «нелинейные» потенциалы. Грубое объяснение состоит в том, что зная решение для Ψ-функции, коэффициенты ее уравнения находятся элементарными операциями, в то время как для обратного необходимо интегрирование. Оно является не просто чрезвычайно трудной проблемой, но и в общем виде не решаемой даже для тех же «интегрируемых» уравнений. Следует также упомянуть, что квантово-механические задачи вообще и изначально определяются линейными операторами, а спектральные задачи, задаваемые обыкновенными дифференциальными операторами так или иначе возникают, когда встают проблемы о спектрах наблюдаемых. Можно сказать, что понимание физики моделей, в той или иной мере считающихся решаемыми, и их непосредственное интегрирование оказываются столь переплетенными, что нецелесообразно отделять одно от другого: выводы уравнений и методы их интегрирования взаимно обогащают друг друга. В указанных контекстах роль уравнения $(*)$ не менее универсальна, чем собственно инвариантные полевые уравнения.

Число точно решаемых моделей до недавнего времени было очень невелико, но после 1960-х годов «солитонный бум» значительно расширил их количество, оказав огромное влияние даже на физику. Самым непосредственным образом точно решаемые теории связаны с тем, откуда исторически идет их наиболее употребительное название: конечнозонные спектральные методы в теории твердого тела. Конечнозонные потенциалы являют в ней такие модельные, но реалистичные периодические, поля $u(x)$, что энергетический спектр свободных электронов, находящихся в них, имеет зонную структуру — чередующиеся разрешенные/запрещенные уровни допустимых значений E — и число таких зон есть *конечная* величина.

Хотя в настоящее время солитонно-конечнозонный класс является самым широким точно решаемым классом, содержащим огромное количество параметров, его методы и техника традиционно считаются трудными, особенно в прикладных областях. Причина в том, что их освоение требует очень интенсивного использования очень сложного математического аппарата и это отражается в не менее употребительных параллельных названиях для теории: алгебро-геометрические или тэта-функциональные методы. Эта сложность уже давно и не раз отмечалась в физической литературе, но в тоже время осознается, что тэта-функции действительно являются необходимым объектом, когда речь идет о конечных формулах. Вопрос о «превращении» тэта-функциональных методов в общеупотребительные важен еще хотя бы и потому, что средства с элементарными функциями являются простыми предельными случаями тэта-функциональных. Существенно, что такое обобщение вовсе не абстрактно, а естественно и в некотором смысле единственно возможное. Отсюда следует, что с прагматической и физической точки зрения актуальной является своего рода «канонизация» понимания того, что стоит за этими методами и их тривиализации. Эта проблема еще далека от того, чтобы быть решенной по части тэта-функций, даже с учетом результатов, излагаемых в диссертации.

Общая характеристика работы

Цели и задачи диссертации. Основным, но не единственным, объектом исследования является уравнение ($*$) и доведение его решений до состояния, когда с точки зрения приложений «дальнейшее упрощение уже невозможно». Это зачастую не возможно без существенного расширения имеющейся математической техники и даже ее переработки. Она вовлекает тэта-функции — чрезвычайно классический объекты, но и они требует расширения. Например, развиваемый дифференциальный θ-аппарат абсолютно необходим, когда встает вопрос о квантовании тэта-функций как обобщений элементарных (гармонический осциллятор, экспоненты и т. д.). Поэтому после получения квадратур для Ψ-функции целью диссертации является доведение используемых методов до функционирующих формул, которые легко поддаются непосредственному физическому анализу.

Научная новизна и значимость. Научная значимость результатов следует из фундаментальной значимости уравнения ($*$). Ни «интегрируемые» ни «неинтегрируемые» линейные/нелинейные уравнения не будут решены точно никогда, поскольку поля и начальные данные могут быть сколь угодно произвольными; в точную решаемость необходимо вкладывать более конкретный смысл. В этом отношении, как с формальной, так и неформальной точки зрения, автором было замечено, что в классе конечнозонных потенциалов спектральные уравнения типа (∗), как это ни парадоксально, до сих пор не были явно проинтегрированы. Без проверяемой прямыми подстановками Ψ-функции, вопрос о решении так или иначе возникает вновь. Именно такая форма решения была получена впервые (см. гл. 1 и работы [13, 16]). Знаменитые тэта-функциональные формулы являются её следствием и их появление уже не традиционно аксиоматично, а регулярно.

Новизна и значимость результатов, связанных с тэта-функциями, объясняется тем, что найденные свойства классических θ-функций Якоби не просто новые, а принадлежат к разряду фундаментальных и определяющих. Не имея в наличии дифференциальных определений θ-функций, вопросы их квантования не возможны даже в постановках. Более того, переход от элементарных квантований осцилляторов к квантованию тэта-функций представляет значимость не просто как некоторое нелинейное обобщение, а как непертурбативное обобщение; нет необходимости в приближениях слабой связи. Это основной признак квантования солитонных моделей[3]. Квантовая решаемость во многих отношениях наследуется классической точной интегрируемостью. Поскольку тэта-функции являются минимальными строительными блоками теории, *"рано или поздно мы должны прийти к квантованию тэта-функций"*[4]. В этом направлении сделаны первые, но важные шаги.

Использование в полной мере новых свойств θ-функций позволило впервые найти случаи, для которых можно утверждать, что задача решена до конца. Без расширения классической теории униформизации результаты такого сорта были бы не возможны, тем более, что использование тэта-функций и явное построение фундаментальных голоморфных интегралов как функций униформизирующего параметра в литературе даже не обсуждалось. Ввиду отсутствия аналитически решаемых примеров, современное состояние методов униформизации оставляло впечатление невозможности «хоть какого-нибудь» приложения и мы приводим большое количество таковых.

---

[3]Раджараман Р. *Солитоны и инстантоны в квантовой теории поля.* Мир: Москва (1985).

[4]Смирнов Ф. А. *Что мы квантуем в интегрируемых моделях теории поля?* Алгебра и анализ (1994) **6**(2), 248–261.

Основные положения, выносимые на защиту.

- Предложен новый подход к точно решаемым случаям 1-мерного уравнения Шрёдингера
$$-\Psi'' + u(x)\Psi = E\Psi\,.$$
На его основе получена явная *квадратурная* формула для Ψ-функции. Как частные случаи формула охватывает *все* потенциалы с конечным числом запрещенных зон в спектре и классические солитоны.

- Разработана схема регулярного вывода представления для $\Psi(x;E)$ в терминах Θ-функций, не использующая аксиоматическое введение римановых поверхностей. Между квадратурами и классической спектральной концепцией имеется точное соответствие — спектрально квадратурная двойственность; она описана аналитически.

- Разработаны алгоритмические процедуры получения спектральных характеристик и дисперсионных соотношений $E = E(k)$ для потенциалов в эллиптических функциях для широкого класса спектральных уравнений $\widehat{\boldsymbol{L}}(u(x);\partial_x)\Psi = E\Psi$.

- Выведены дифференциальные уравнения на классические θ-функции Якоби и их конечнозонное расширение. Уравнения являются гамильтоновыми и лагранжевыми, а их частные случаи допускают постановку вопроса квантования данных динамических систем и его решение, включая спектральное уравнение для гамильтониана.

- Космологические алгебраические метрики Пикара–Хитчина, как решения уравнения Пенлеве-6, параметризуются в θ-функциях. Как следствие, возникают гиперэллиптические кривые и эффективизация конечнозонных потенциалов уравнения Шрёдингера в контексте методов униформизации.

- Развитый аппарат θ-функций приводит к аналитически решаемым случаям теории униформизации алгебраических зависимостей. Предложена геометрически замкнутая переформулировка теории. Впервые найдены полностью и точно решаемые случаи.

Достоверность результатов. Весь материал диссертации основан на современном понимании конечнозонной теории и воспроизводит ее целиком.

Новые результаты проверяются прямыми подстановками, а математический аппарат алгоритмически автоматизирован на компьютере. В тех случаях, когда аналитические проверки трудоемки даже с использованием компьютерных программ имеется возможность числовых проверок, что тоже реализовано на пользовательском уровне. Средой для аналитических и числовых расчетов является пакет MAPLE (Waterloo Co.).

Апробация работы и публикации. Результаты исследований по теме диссертации докладывались на международных конференциях и семинарах, проходивших в: Berlin (Intern. Math. Congress, 1998, Germany), Honolulu (University of Hawaii, 1998, USA), Красноярск (Красноярский ун-т, 2000), Toruń (Nicolaus Copernicus Univ., 2001, Poland), Edinburgh (Heriot–Watt Univ., 2001–2002, UK), Leeds (University of Leeds, 2002, UK), Edinburgh (Edinburgh Univ., 2002, UK), Cambridge (Isaac Newton Inst. Math. Sciences, Cambridge, 2002, UK), London (Imperial College, 2003, UK), Boston (Boston Univ., 2003, USA), Harvard (Harvard Univ., 2003, USA), Москва (МГУ, 2011, 2012), С.-Петербург (Мат. институт Эйлера, 2011), а также на многочисленных семинарах, среди которых семинары, проходившие в Московском гос. ун-те (2001), Минском гос. ун-те 2010 и математическом ин-те им. Стеклова (Москва, 2005, 2012). Элементарные основы теории читались в серии лекций для молодых ученых (ОИЯИ, Дубна, 2010) и спецкурсах кафедры квантовой теории поля Томского гос. ун-та (2009–2011).

Исследования поддерживались грантами РФФИ (проект 00–01–00782), Royal Society/NATO Fellowship (2000–2002, UK), NSF/NATO DGE–0209549 (2002–2003, USA) и ФЦП (02.740.11.0238). По результатам исследований опубликовано 20 работ [1–20], среди которых 4 обзорные статьи [12, 13, 16, 18]. Список работ приведен в конце автореферата.

Личный вклад автора. Все результаты диссертационной работы, включая мотивации, постановки задач, методы решений, алгоритмизации и компьютерные реализации, принадлежат автору; небольшое исключение составляют работы [7–9] и [20], где вклад автора является ключевым.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из Введения, семи глав, Приложения и списка литературы из 202 ссылок. Текст содержит 253 страницы, 7 рисунков и 1 таблицу.

Содержание работы

Помимо **Введения** и списка литературы диссертация состоит из следующих разделов.

Глава 1. Интегрируемость: конечнозонная и точная

Глава 2. Конечнозонность и тэта-функции
Глава 3. Эллиптические солитоны
Глава 4. Динамические свойства и квантование θ-функций
Глава 5. Дифференциальные свойства ϑ-констант
Глава 6. Космологические метрики Хитчина и θ-функции
Глава 7. Методы теории униформизации
Приложение

Каждая глава предваряется кратким вступлением, содержащим мотивации для рассмотрения проблематики раздела. Излагаемая далее теория в конечном счете нацелена на нахождение точно интегрируемых потенциалов $u(x)$, соответствующих им $\Psi(x;\lambda)$-функций и на проблему эффективного описания решений от переменных и параметров. Применяемая и расширяемая техника имеет не меньший и самостоятельный интерес.

Глава 1. Мотивировкой к рассмотрению вопроса о точно решаемых потенциалах $u(x)$ уравнения $(*)$ является наблюдение (**§ 1.1**) о том, что все солитонные потенциалы, будучи вещественными по своей природе, допускают не просто аналитические выражения для Ψ-функции в элементарных функциях, но на самом деле решаемы при произвольных комплексных значениях E, которое будем далее обозначать как $-\lambda$:

$$\Psi'' - u(x)\Psi = \lambda\Psi. \tag{1}$$

При наличии непрерывного спектра, вопрос о полноте собственных функций и «разбиения единицы» становится столь же фундаментальным, как и вопрос о дискретном спектре самосопряженных операторов, когда пространство состояний есть L^2. Поэтому проблема нахождения зависимости Ψ от параметра, превращается в проблему нахождения зависимости $\Psi(\lambda)$ как функции от переменной. Это радикально отличается от ситуаций с чисто дискретным спектром, так как требуются не изолированные значения $\Psi(x;\lambda_k)$, а вся функция $\Psi(x;\lambda)$ целиком. В главе показывается (**§§ 1.2–3**), что решение Ψ представимо в квадратурах для *всех* значений λ, когда квадратуры есть квадратуры от алгебраической функции гиперэллиптического типа

$$\mu^2 = (\lambda - E_1)\cdots(\lambda - E_{2g+1}), \tag{2}$$

а потенциалы совпадают с общеизвестным алгебро-геометрическим классом[5]. При этом все физические вещественные периодические потенциалы

[5] Belokolos E. D., Bobenko A. I., Enol'skii V. Z., Its A. R., Matveev V. B. *Algebro-Geometric Approach to Nonlinear Integrable Equations.* Springer Series in Nonlinear Dynamics. Springer–Verlag: Berlin–Heidelberg–New York (1994).

$u(x+\Omega) = u(x)$ с периодом Ω являются частными случаями данной конструкции, которая задается только целочисленным параметром g (число зон) и соотношением (2). Основной результат раздела может быть сформулирован в следующем виде.

Теорема 1. *Пусть $u(x)$ — конечнозонный потенциал, соответствующий (построенный по) соотношению (2). Тогда решение Ψ уравнения (1) имеет вид квадратур*

$$\Psi^{\pm}(x;\lambda) = \exp\frac{1}{2}\left\{\int^{\gamma_1(x)}\frac{w\pm\mu}{z-\lambda}\frac{dz}{w} + \cdots + \int^{\gamma_g(x)}\frac{w\pm\mu}{z-\lambda}\frac{dz}{w}\right\}, \tag{3}$$

$$w^2 := (z-E_1)\cdots(z-E_{2g+1}),$$

а величины $\gamma_k = \gamma_k(x)$, как функции от x, определяются через обращения набора из g неопределенных интегралов (задача Якоби)

$$\sum_{k=1}^{g}\int^{\gamma_k} z^{g-1}\frac{dz}{w} = 2x + a_g, \qquad \sum_{k=1}^{g}\int^{\gamma_k} z^{n}\frac{dz}{w} = a_{n+1}, \quad n = 0, 1, \ldots, g-2. \tag{4}$$

Потенциал $u(x)$ при этом дается формулой Матвеева–Итса

$$u = 2\sum_{k=1}^{g}\gamma_k(x) - \sum_{k=1}^{2g+1}E_k, \tag{5}$$

а произвольными параметрами теории являются λ и $3g+1$ констант E_k, a_k.

Далее в главе объясняется (**§ 1.4**) где и когда возникает необходимость во введении римановых поверхностей и, в качестве иллюстрации, проводится аналогия с элементарными солитонными случаями. Она полностью обосновывает тот факт, что элементарная и конечнозонная теории не различимы с точки зрения решаемости; обе носят квадратурный характер. Наибольшее усложнение связано с проблемой обращения набора из g интегралов (1). В случае общего положения по параметрам $\{E_k\}$ они принадлежат к разряду абелевых интегралов.

Идеология претерпевает малые изменения (**§ 1.5**), когда рассматриваются более сложные спектральные уравнения, например, происходящие от $(\widehat{\boldsymbol{L}}, \widehat{\boldsymbol{A}})$-пар интегрируемых уравнений:

$$\widehat{\boldsymbol{L}}([u];\partial_x)\Psi = \lambda\Psi, \qquad \Psi_t = \widehat{\boldsymbol{A}}([u];\partial_x)\Psi.$$

Квадратурная формула для Ψ-функции в этом общем случае получается по схеме дифференциального исключения производных $\Psi^{(n)}$ из стационарной версии данных уравнений. Если $z := x - ct$, тогда $\Psi = T(t)\psi(z)$ и

$$\widehat{\boldsymbol{L}}([u];\partial_z)\psi = \lambda\psi, \qquad \big(\widehat{\boldsymbol{A}}([u];\partial_z) + c\partial_z\big)\psi = \mu\psi, \tag{6}$$

где μ — параметр разделения переменных. Отсюда следует общий рецепт вывода Ψ-формулы в точно решаемом классе:

$$\Psi_z = G([u];\lambda,\mu)\Psi \qquad \Longrightarrow \qquad \Psi = \exp\int^{z} G([u];\lambda,\mu)\,dz. \tag{7}$$

В качестве примера рассмотрена спектральная задача

$$\Psi''' - u\Psi' = \lambda\Psi,$$

а для ближайшего нетривиального случая получается решение

$$\Psi(x;\lambda) = \exp\int^{x} \frac{\mu(2u'' - v) - 3\lambda(27\lambda^2 + 2v'' - 2vu - 7u'^2)}{3(3\lambda + u')u''' - 3(\mu + 6\lambda u)u' - 9\lambda(\mu + 3\lambda u) - (2u'' + v)u'' - 3uu'^2 + v^2}\,dx.$$

где $v := u^2 + 12\alpha$. Формула допускает дальнейшую эффективизацию, если рассмотреть потенциал, выражающийся в эллиптических функциях

$$u = 6\wp(x + 12\alpha t - \Omega;\alpha, g_3) + 6\,\wp(x + 12\alpha t - \tilde{\Omega};\alpha,\tilde{g}_3).$$

Алгебраическое соотношение $W(\lambda,\mu) = 0$ здесь принимает вид

$$\mu^3 - 324\alpha\lambda^2\mu + 729\lambda\big((\lambda^2 + 4g_3 + 4\tilde{g}_3)^2 - 64g_3\tilde{g}_3\big) = 0.$$

В заключении главы (**§ 1.51**) описана схема вывода уравнений Дубровина для уравнений 3-го порядка общего вида

$$\Psi''' + u(x;\lambda)\Psi' + v(x;\lambda)\Psi = 0. \tag{8}$$

Уравнения Дубровина это просто дифференциальная форма интегральной (квадратурной) задачи обращения и наоборот, задача обращения — это интегральный вариант разделения переменных в дифференциальных уравнениях Дубровина. Приведен нетривиальный пример получения этих уравнений и три различные новые версии формул для восстановления потенциала по спектральным данным; они традиционно называются формулами следов и являются аналогами формулы (5). Формула следов — это важный атрибут точной решаемости. Ее выводимость не столь регулярна как получение собственно решений Ψ, а для уравнений выше второго порядка остается нерешенной проблемой.

Без использования аппарата тэта-функций и римановых поверхностей эффективное представление квадратурных форм решений типа (3) и (7), как функций от переменной x и параметра λ, не возможно. Этому посвящены оставшиеся главы.

Глава 2 начинается с комментариев (**§2.1**) по поводу понятия точная решаемость. Аккуратные формулировки точной интегрируемости линейных дифференциальных уравнений составляют содержание теории Лиувилля, расширенной позднее Пикаром и Вессио́. Линейная лиувиллевская интегрируемость была разработана Лиувиллем до его знаменитой теории гамильтоновой нелинейной интегрируемости. Хотя связь гамильтоновых уравнений с лиувиллевской нелинейной интегрируемостью общеизвестна, «линейная» теория Лиувилля до недавнего времени не упоминалась и не использовалась в спектральных задачах. Мы показываем, что конечнозонное интегрирование уравнений типа (1) сводится к интегрированию конечного числа копий простейших уравнений 1-го порядка

$$\psi_z = A(z)\psi + B(z).$$

Это соответствует лиувиллевским расширениям в теории Пикара–Вессио. В конечнозонном семействе $A(z)$ есть алгебраические функции, поэтому решения этого уравнения есть фактически абелевы интегралы. Спектральная версия для Ψ-функции[6] «похожа» на формулу (3):

$$\Psi^{\pm}(x;\lambda) = \exp\frac{1}{2}\left\{\int^{\lambda}\frac{w\pm\nu_1(x)}{z-\gamma_1(x)}\frac{dz}{w} + \cdots + \int^{\lambda}\frac{w\pm\nu_g(x)}{z-\gamma_g(x)}\frac{dz}{w}\right\} + H(x;\lambda),$$

$$\nu_k(x)^2 := \bigl(\gamma_k(x)-E_1\bigr)\cdots\bigl(\gamma_k(x)-E_{2g+1}\bigr),$$

но имеет очень нетривиальную «добавку»-функцию $H(x;\lambda)$, содержащую почти все объекты римановой теории абелевых интегралов на римановых поверхностях. По этой причине ее полный вид не приводится (§2.1) и это же обстоятельство демонстрирует соотношение между сложностью спектрального и простотой квадратурного подходов. Мы называем этот факт *спектрально-квадратурной двойственностью.*

В **§2.2** показывается как из формулы (3) выводится знаменитое тэта-функциональное представление

$$\Psi(x;\lambda) = \frac{\Theta(\mathbf{u}(\infty)-\boldsymbol{D})}{\Theta(\mathbf{u}(\lambda)-\boldsymbol{D})}\cdot\frac{\Theta(\mathbf{u}(\lambda)+x\boldsymbol{U}-\boldsymbol{D})}{\Theta(\mathbf{u}(\infty)+x\boldsymbol{U}-\boldsymbol{D})}\,e^{\mathrm{II}(\lambda)x},$$

которое в современных формулировках аксиоматически постулируется как функция Бейкера–Ахиезера. Разумеется, все объекты фигурирующие в

[6] Итс А. Р., Матвеев В. Б. *Операторы Шрёдингера с конечнозонным спектром и N-солитонные решения уравнения Кортевега–де Фриса.* Теор. мат. физика (1975) **23**(1), 51–67.

этой формуле при таком взгляде возникают естественно и регулярным способом: нормализованные голоморфные интегралы $\mathbf{u}$, нормализованный мероморфный интеграл $\mathbb{I}$, его периоды $\boldsymbol{U}$, произвольный вектор $\boldsymbol{D}$ и собственно Θ-ряд Фурье. Поскольку эти объекты достаточно нетривиальны в отношении понимания их физического содержания, в **§2.3** дается более развернутое объяснение смысла мероморфного интеграла $\mathbb{I}(\lambda)$.

Если потенциал периодичен, то зависимость интеграла $\mathbb{I}$ от спектрального параметра λ может быть проинтерпретирована фактически как зависимость энергии $E = E(k)$ от квазиимпульса k, если речь идет об энергии свободного электрона как функции от множителя $\mathrm{e}^{\mathrm{i}k}$ (кристаллический момент), фигурирующего в известной теореме Блоха: $\psi(x+\Omega) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}k}\psi(x)$. Это общеизвестное дисперсионное соотношение в теории твердого тела. Явная решаемость теории естественно ведет к явной выводимости любых соотношений такого типа. Например, в простом случае 2-зонного потенциала Ламе $u = 6\wp(x+\omega')$, мы имеем, переходя к привычному обозначению для энергии, выражения

$$k = 2\mathrm{i}\left\{\zeta(\alpha) + \frac{(9E^2-27g_2)\wp'(\alpha)}{E^3-9g_2\lambda+54g_3}\right\}\omega - 2\mathrm{i}\alpha\eta, \qquad \wp(\alpha) = -\frac{E^3-27g_3}{9E^2-27g_2}, \quad (9)$$

где ω, η, g_2, g_3, ζ, $\wp$, $\wp'$ — стандартные значки для параметров и функций в эллиптической теории Вейерштрасса. Окончательная зависимость $E = E(k)$ находится из этой α-параметрической формы, исключением величины α. Аппарат эллиптических функций хорошо развит, поэтому без труда выводятся соотношения типа групповых скоростей

$$v_{\text{гр}} = \frac{dE}{dk} = -\frac{27}{\mathrm{i}\omega}\frac{(E^2-3g_2)^2\wp'(\alpha)}{(2E^2-3g_2)(E^3-9g_2E+54g_3)}.$$

Хотя этот пример весь прописывается в эллиптических функциях, он самым лучшим способом демонстрирует неизбежную проблему многозначностей, возникающих в конечнозонной теории. Зависимость теории от параметров включает весь набор функций, которые составляют минимально замкнутый набор объектов на римановых поверхностях: абелевы интегралы 1-го, 2-го, 3-го рода и их периоды. Только что указанное исключение переменной α есть существенно трансцендентная операция с трансцендентными объектами. Это дает важнейшую мотивацию к тому, чтобы дисперсионные соотношения рассматривать в обратном порядке $k = k(E)$ и, более того, ре-интерпретировать их как зависимости от точки на кривой (2), т. е. пары (λ, μ). После полного перехода к такому (униформизационному) взгляду — он реализован в гл. 7 — проблемы с многозначностями исчезают.

Далее подробно разбирается нетривиальный 2-зонный потенциал, не являющийся эллиптической функцией; он не укладывается в хорошо разработанную теорию эллиптических солитонов. Зависимость $\mathbf{\Pi}(\lambda)$ тем не менее выводится аналитически. А именно, если $u(x)$ имеет вид

$$u = -2\ln_{xx}\big\{\theta_4(Ux + A|\tau)\theta_2(Vx + B|\varkappa) - \mathrm{i}\theta_1(Ux + A|\tau)\theta_1(Vx + B|\varkappa)\big\},$$

то дисперсионное соотношение легко получается из выражения $\mathbf{\Pi}(\lambda)$:

$$\begin{aligned}\mathbf{\Pi}(\lambda) &= a\cdot\frac{\theta_1'\big(\mathfrak{u}_1-\frac{1}{2}\tau|\tau\big)}{\theta_1\big(\mathfrak{u}_1-\frac{1}{2}\tau|\tau\big)} + b\cdot\frac{\theta_1'\big(\mathfrak{u}_2-\frac{1}{2}\varkappa|\varkappa\big)}{\theta_1\big(\mathfrak{u}_2-\frac{1}{2}\varkappa|\varkappa\big)} + c\cdot\mathfrak{u}_1 + d\cdot\mathfrak{u}_2 = \\ &= a\cdot\frac{\theta_1'(\mathfrak{u}_1|\tau)}{\theta_1(\mathfrak{u}_1|\tau)} + b\cdot\frac{\theta_1'(\mathfrak{u}_2|\varkappa)}{\theta_1(\mathfrak{u}_2|\varkappa)} + \frac{(\lambda+p)\mu}{\lambda(\lambda-\boldsymbol{a})(\lambda-\boldsymbol{b})} + q\cdot\mathfrak{u}_1 + r\cdot\mathfrak{u}_2.\end{aligned}$$

Здесь $\mathfrak{u}_1(\lambda)$, $\mathfrak{u}_2(\lambda)$ — голоморфные интегралы, $U, V, A, B, \tau, \varkappa$ — свободные параметры потенциала, а константы $\{a, b, c, d, p, q, r\}$ зависят только от параметров потенциала, но не зависят от спектрального параметра λ.

В **Главе 3** мы кратко останавливаемся на способе получения точно решаемых потенциалов в эллиптических функциях и соответствующих им Ψ-функций. Класс таких задач на сегодняшний день является единственным, для которого можно сказать, что сопутствующие проблемы теории доведены до решений, которыми почти возможно оперировать на практике. Причина в том, что аппарат эллиптических функций принадлежит к разряду классически развитых и давно эксплуатируемых.

Стандартным средством здесь является метод Эрмита–Альфана, использующий 1-зонное решение уравнения (1):

$$\Phi(x;\alpha) = \frac{\sigma(\alpha - x)}{\sigma(\alpha)\sigma(x)}e^{\zeta(\alpha)x}, \qquad \alpha := \wp^{-1}(\lambda).$$

Мы показываем (**§3.1**), что все искомые величины теории находятся алгоритмически с использованием теории полиномиальных базисов Грёбнера и, что немало важно, процедура автоматизируется. Открытие в 1960-х годах базисов Грёбнера оказало почти революционное влияние на вычислительные аналитические (не числовые) задачи.

Общность предлагаемой техники такова, что она позволяет получать результаты классификационного характера. Например (**§3.2**), легко показывается, что потенциалы вида $u = 6\wp(x) + 2\wp(x - \Omega)$ решаемы методом базисов Грёбнера, только если $\Omega = \{\omega, \omega', \omega''\}$, т. е. являются известными потенциалами Трейбича–Вердье. В более подробной форме примеры, включая спектральные уравнения порядка 3 рассмотрены в работах [1, 10] и [11].

Завершают главу §§**3.3–4**, в которых исследуется другой способ «алгебраизации» работы с эллиптическим конечнозонными потенциалами

$$\Psi_{xx} - \Big\{\sum\nolimits_{\varrho} n_\varrho(n_\varrho+1)\wp(x-\varrho)\Big\}\Psi = \lambda\Psi. \tag{10}$$

Он связан с тем фактом, что они допускают трансформацию этого уравнения в уравнения известного класса — класса Фукса — и, в частности, в уравнения с рациональными коэффициентами. Более того, для таких уравнений в начале 1980-х годов разработаны полностью автоматизируемые алгоритмы их решений. Самым знаменитым из них является исторически первый — алгоритм Ковачика — и интересно отметить, что его связь с конечнозонной теорией была подмечена совсем недавно [6]. Это тем более любопытно, что и конечнозонная теория и алгоритмы типа Ковачика–Зингера имеют дело с точным интегрированием одних тех же уравнений.

Замена переменных $(x,\Psi)\mapsto\big(z=\wp(x), \psi=\sqrt{\wp'(x)}\,\Psi\big)$ в уравнении (10) приводит к уравнениям вида обобщенной задачи Штурма–Лиувилля

$$\psi_{zz} = -\left\{\frac{3}{16}\frac{(4z^2+g_2)^2+32g_3z}{(4z^3-g_2z-g_3)^2} - \frac{Q_1(z)+wQ_2(z)+\lambda}{4z^3-g_2z-g_3}\right\}\psi, \tag{11}$$

где $w^2 := 4z^3-g_2z-g_3$, а Q_1, Q_2 — рациональные функции. Весь точно решаемый класс для этого уравнения строится из конечнозонной теории и наоборот, причем еще в большей степени эффективности:

$$\psi^{\pm}(z;\lambda) = \sqrt{(\boldsymbol{R}_1+\boldsymbol{R}_2w)w}\,\exp\int\limits_a^z \frac{\mp\mu\boldsymbol{R}_2}{G}dz\cdot\exp\int\limits_a^z\frac{\pm\mu\boldsymbol{R}_1}{G}\frac{dz}{w}, \tag{12}$$

где $G := \boldsymbol{R}_1^2(z)-(4z^3-g_2z-g_3)\boldsymbol{R}_2^2(z)$, а для функции $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}_1(z)+\boldsymbol{R}_2(z)w$ предъявляется рекуррентная процедура вычисления

$$\boldsymbol{R} = \sum_{0}^{g}{}_n \lambda^n \sum_{0}^{g-n}{}_j c_j R_{g-n-j}, \qquad R_0=1, \qquad c_0=1,$$

где

$$R_k = \frac{1}{8}\sum_{1}^{k-1}{}_j\big\{2(w^2R_j')'R_{k-j-1} - (w^2R_{k-j-1})'R_j' - 4(R_{k-j}+uR_{k-j-1})R_j\big\} - \frac{1}{2}uR_{k-1}$$

и штрих $'$ означает производную по z. Для уравнения найдена также и важнейшая характеристика как уравнений с периодическими коэффициентами, так и фуксовых уравнений — явное матричное представление для группы их монодромий.

Глава 4. Переходя к Θ-формулам, мы фокусируемся на эллиптических θ-функциях Якоби, поскольку именно с ними вся теория доводится до конца. Параграфы **§§4.1–3** данной главы посвящены исчерпывающему описанию новых свойств этих функций. Отправным пунктом главы является тот результат, что классический набор $\theta_1 := -\theta[{}^1_1]$, $\theta_2 := \theta[{}^1_0]$, $\theta_3 := \theta[{}^0_0]$, $\theta_4 := \theta[{}^0_1]$, где

$$\theta[{}^\alpha_\beta](z|\tau) = \sum_k^{+\infty}\!\!\!{}_{-\infty}\, e^{\pi i\left(k+\frac{\alpha}{2}\right)^2\tau + 2\pi i\left(k+\frac{\alpha}{2}\right)\left(z+\frac{\beta}{2}\right)}, \tag{13}$$

должен быть дополнен введением производной от одной из θ_k, например, $\theta_1'(z|\tau) := \partial_z\theta_1(z|\tau)$. Тогда расширенный комплект $\{\theta_k, \theta_1'\}$ удовлетворяет *замкнутым обыкновенным дифференциальным уравнениям* по обеим переменным z и τ:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial\theta_k}{\partial z} &= \frac{\theta_1'}{\theta_1}\theta_k - \pi\vartheta_k^2\cdot\frac{\theta_\nu\theta_\mu}{\theta_1} \\ \frac{\partial\theta_1'}{\partial z} &= \frac{\theta_1'^2}{\theta_1} - \pi^2\vartheta_3^2\vartheta_4^2\cdot\frac{\theta_2^2}{\theta_1} - 4\left\{\eta + \frac{\pi^2}{12}\left(\vartheta_3^4+\vartheta_4^4\right)\right\}\cdot\theta_1, \end{aligned}\right. \tag{14}$$

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial\theta_k}{\partial\tau} &= \frac{-i}{4\pi}\frac{\theta_1'^2}{\theta_1^2}\theta_k + \frac{i}{2}\vartheta_k^2\cdot\theta_1'\frac{\theta_\nu\theta_\mu}{\theta_1^2} + \\ &\quad + \frac{i}{4}\pi\left\{\vartheta_3^2\vartheta_4^2\cdot\theta_2^2 - \vartheta_k^2\vartheta_\mu^2\cdot\theta_\nu^2 - \vartheta_k^2\vartheta_\nu^2\cdot\theta_\mu^2\right\}\frac{\theta_k}{\theta_1^2} + \\ &\quad + \frac{i}{\pi}\left\{\eta + \frac{\pi^2}{12}\left(\vartheta_3^4+\vartheta_4^4\right)\right\}\cdot\theta_k \\ \frac{\partial\theta_1'}{\partial\tau} &= \frac{-i}{4\pi}\frac{\theta_1'^3}{\theta_1^2} + \frac{3i}{\pi}\left\{\frac{\pi^2}{4}\vartheta_3^2\vartheta_4^2\cdot\frac{\theta_2^2}{\theta_1^2} + \eta + \frac{\pi^2}{12}\left(\vartheta_3^4+\vartheta_4^4\right)\right\}\theta_1' - \\ &\quad - \frac{i}{2}\pi^2\vartheta_2^2\vartheta_3^2\vartheta_4^2\cdot\frac{\theta_2\theta_3\theta_4}{\theta_1^2}, \end{aligned}\right. \tag{15}$$

где $k = 1, \ldots, 4$, $\nu := \frac{8k-28}{3k-10}$, $\mu := \frac{10k-28}{3k-8}$, а величины $\vartheta_k = \theta_k(0|\tau)$ уже не обязательно рассматривать как значения θ-функций в нуле.

Интересно отметить, что в неопубликованном препринте hep-ph/9912502[7], остающимся по всей видимости без внимания, обнаружено поразительное эмпирическое сходство между θ-функциями, включая производную θ_1' и, с

[7]Scott W. G. *Nucleon Structure, Duality and Elliptic Theta Functions.* http://arXiv.org/hep-ph/9912502 (2001).

другой стороны, структурными функциями ядра, признающимися фундаментальными объектами и у экспериментаторов и у теоретиков (особенно в струнных моделях); найденные соотношения работают на разных масштабах.

Вторая серия из уравнений (14)–(15) является следствием уравнения теплопроводности $4\pi\mathrm{i}\theta_\tau = \theta_{zz}$ и приводит к новому взгляду и на него самого и на его роль в теории частиц. Приведенные уравнения являются *обыкновенными* дифференциальными уравнениями, в то время как уравнение теплопроводности — это уравнение в *частных* производных. Условием совместности уравнений (14)–(15) является еще одна динамическая система:

$$\begin{cases} \dfrac{d\vartheta_2}{d\tau} = \dfrac{\mathrm{i}}{\pi}\left\{\eta + \dfrac{\pi^2}{12}\left(\vartheta_3^4 + \vartheta_4^4\right)\right\}\vartheta_2 \\ \dfrac{d\vartheta_3}{d\tau} = \dfrac{\mathrm{i}}{\pi}\left\{\eta + \dfrac{\pi^2}{12}\left(\vartheta_3^4 + \vartheta_4^4 - 3\boldsymbol{B}^4\vartheta_4^4\right)\right\}\vartheta_3 \\ \dfrac{d\vartheta_4}{d\tau} = \dfrac{\mathrm{i}}{\pi}\left\{\eta + \dfrac{\pi^2}{12}\left(\vartheta_3^4 + \vartheta_4^4 - 3\boldsymbol{A}^4\vartheta_3^4\right)\right\}\vartheta_4 \\ \dfrac{d\eta}{d\tau} = \dfrac{\mathrm{i}}{\pi}2\eta^2 - \dfrac{\pi^3}{72}\mathrm{i}\left\{\vartheta_3^8 + \left(9\boldsymbol{A}^4\boldsymbol{B}^4 - 6\boldsymbol{A}^4 - 6\boldsymbol{B}^4 + 2\right)\vartheta_3^4\vartheta_4^4 + \vartheta_4^8\right\}, \end{cases} \tag{16}$$

где $\boldsymbol{A}^4$ и $\boldsymbol{B}^4$ — рациональные интегралы систем (14)–(15):

$$\boldsymbol{A}^4\cdot\vartheta_3^2\theta_1^2 = \vartheta_2^2\theta_4^2 - \vartheta_4^2\theta_2^2, \qquad \boldsymbol{B}^4\cdot\vartheta_4^2\theta_1^2 = \vartheta_2^2\theta_3^2 - \vartheta_3^2\theta_2^2.$$

Это означает, что классические квадратичные тождества между тэта-функциями на самом деле следует рассматривать как частный случай поверхностей уровня интегралов динамических систем (14)–(15).

В силу исключительной важности θ-функций как строительных блоков есть смысл посмотреть на них самостоятельно, но в контексте конечнозонной теории (**§4.4**); там имеется принципиальная произвольность внешнего параметра λ. Такой взгляд оказывается конструктивным и приводит к *конечнозонному расширению* уравнений на θ-функции:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\theta_k}{\partial z} = \dfrac{\theta_1'}{\theta_1}\theta_k - \pi\vartheta_k^2\cdot\dfrac{\theta_\nu\theta_\mu}{\theta_1}, \\ \dfrac{\partial\theta_1'}{\partial z} = \dfrac{\theta_1'^2}{\theta_1} - \pi^2\vartheta_3^2\vartheta_4^2\cdot\dfrac{\theta_2^2}{\theta_1} - 4\left\{\eta + \dfrac{\pi^2}{12}\left(\vartheta_3^4 + \vartheta_4^4\right)\right\}\cdot\theta_1 \\ \dfrac{1}{\Lambda}\dfrac{\partial\Lambda}{\partial z} = \dfrac{\theta_1'}{\theta_1} + \dfrac{\pi\vartheta_2^2}{\theta_1(\mathrm{u})}\cdot\dfrac{\theta_1^3(\mathrm{u})\cdot\theta_2\theta_3\theta_4 + \theta_2(\mathrm{u})\theta_3(\mathrm{u})\theta_4(\mathrm{u})\cdot\theta_1^3}{\theta_1\cdot\left(\theta_2^2(\mathrm{u})\cdot\theta_1^2 - \theta_1^2(\mathrm{u})\cdot\theta_2^2\right)} + h, \end{cases} \tag{17}$$

где

$$\Lambda(z;\mathrm{u}|\tau) := \theta_1(z-\mathrm{u}|\tau)\exp\Big(\frac{\theta_1'(\mathrm{u}|\tau)}{\theta_1(\mathrm{u}|\tau)}z + hz\Big),$$

h — дополнительный параметр и $\lambda = \wp(2\mathrm{u})$.

Эта 6-мерная система уравнений дает также новую трактовку спектрального параметра в том смысле, что если строятся *замкнутые* уравнения, интегрируемые в θ, то они всегда должны содержать внешний параметр. Так появляется спектральное уравнение (спектральная задача) и оно линейно — это уравнение на Λ. Более того, сама θ-функция может быть дифференциально определена через уравнения, решаемые тоже в квадратурах

$$\left(\frac{1}{F_z}\left(\frac{F_x^2}{F}\right)_z\right)_z + 8F_z = 0, \qquad F = (\ln\theta)_{zz} - 2\varrho,$$

$$-\varrho := 2\eta + \frac{1}{6}\pi^2(\vartheta_3^4 + \vartheta_4^4).$$

Отсюда следует новое определение самой θ-функции по правилу

$$\theta(z) = \exp\int^z \left\{ \int^{\Xi(z)} \frac{s\,ds}{\sqrt{s(s-a)(s-b)}} \right\} dz \cdot e^{\varrho z^2 + dz + e}.$$

Уравнения (14)–(17) принадлежат к разряду фундаментальных уравнений.

Итак, в ***алгебраических квадратурах решаются все уравнения теории***: линейные спектральные, их конечнозонное расширение и уравнения на сами θ-функции. При этом, в силу экспоненциального множителя $e^{\varrho z^2+dz+e}$, получается еще и расширение столь известного объекта как θ. Мы кратко комментируем возможности распространения этой идеологии на многомерные Θ-функции.

Развитый аппарат позволяет конструктивно поставить задачу квантования θ-функций, которая разбирается в §§**4.5–6**. В самом деле, найденные динамические (нелинейные) уравнения (14) естественно рассматривать как классический предел. Напомним, классические элементарные объекты, как то экспонента и гармонический осциллятор, являются пределом эллиптических θ, а простейшее обобщение линейного осциллятора приводит к нелинейному маятнику, решаемому, как известно в θ. В связи с этим возникает ряд проблем, которые частично разрешаются.

Система (14) не полиномиальна, что осложняет проблему упорядочивания операторов Вейля, и можно показать, что она не допускает постоянной скобки Пуассона при каком-бы то ни было гамильтониане $\mathscr{H}(\theta,\theta')$. Это существенно отличает ситуацию от стандартной. Тем не менее уравнения (14) превращаемы в полиномиальные, имеющие к тому же структуру «вложенных матрешек»:

$$\underbrace{\overbrace{\dot{x} = yz, \qquad \dot{y} = xz, \qquad \dot{z} = xy,} \qquad \dot{\xi} = -x^2,} \qquad \dot{u} = \xi u.$$

Для этой системы и системы (17) мы подробно разбираем строение полного набора интегралов движения $J_{1,\dots,5}(x, y, z, \xi, u)$ и показываем, что подсистема, выделенная нижней фигурной скобкой, полностью квантуема. Ее первая часть (верхняя скобка) совпадает с уравнениями движения твердого тела в случае Эйлера, но вся 4-мерная система отличается от известных интегрируемых квантуемых моделей: она имеет наблюдаемую — ξ, которая на классическом уровне эволюционирует не как «чистая» эллиптическая функция (отношение θ-функций), а как мероморфный эллиптический интеграл. В этом отношении, уравнения могут рассматриваться как минимальные, так как их динамика содержит и эллиптические функции и их ближайшее расширение — мероморфные интегралы. На такие интегралы, как известно, могут линейно раскладываться некоторые эллиптические функции.

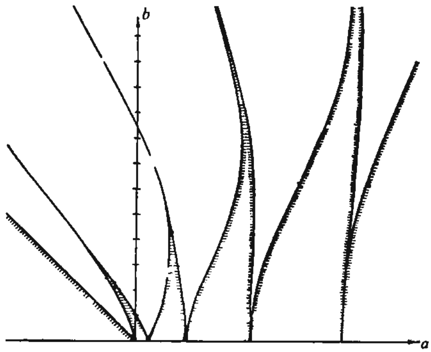

РИС. 1. Зонная структура спектрального уравнения для гамильтониана в квантовании тэта-функций: $\psi'' + (b\cos 2z + a)\psi = 0$. Заштрихованы зоны устойчивости.

Представление операторов

$$\hat{x} := x, \qquad \hat{y} := y, \qquad \hat{z} := -x\partial_y - y\partial_x, \qquad \hat{\xi} := x\partial_x + y\partial_y$$

(найдено П. Казинским) «держат» квантовые уравнения движения, а основная задача на собственные значения $\widehat{\mathscr{H}}\psi = E\psi$ для гамильтониана $\widehat{\mathscr{H}} = \frac{1}{2}\left\{(x\partial_y + y\partial_x)^2 - x^2\right\}$ приводит к уравнению Матье $\psi'' + (b\cos 2z + a)\psi = 0$. Эта задача имеет непрерывный спектр с зонной структурой по параметру a; типичная картина отображена на РИС. 1 (число зон бесконечно). A priori ни откуда не следует, что получится спектральное уравнение с периодическим потенциалом и следовательно с зонной структурой спектра.

В заключении главы подробно прописаны решения всех систем. Как отмечено выше, общие решения являются более широкими, чем просто канонические θ-ряды (13). Мы комментируем также принципиальные трудности, возникающие в проблеме квантования полного комплекта θ-функций.

Глава 5 посвящена эллиптическим ϑ-константам, поскольку они имеют обширные приложения в силу своих богатых дифференциальных свойств как функций от модуля τ. Самые красивые приложения были обнаружены в 1990-х годах в теориях самодуальных уравнений Эйнштейна–Вейля, Янга–Милса и др. Они еще далеко не исчерпаны, но до недавнего времени использовались скорее как дифференциальные системы-тождества. Например, полный набор дифференциальных уравнений на функции $\vartheta(\tau)$ и $\eta(\tau)$ ранее не был описан и определяется системой (16). Вопрос о взгляде на дифференциальные тождества как на дифференциальные уравнения нетривиален и мы показываем в **§5.1**, что это может приводить к уравнениям, которые в настоящее время не представляется возможным проинтегрировать, в то время как сами уравнения являют собой точные тождества между ϑ, η-константами. Повторимся, не только тэта-константы, но и тэта-функции использовались до недавнего времени лишь как обладающие обширными дифференциальными/алгебраическими свойствами без их систематизации. Естественным вариантом такой систематизации, как мы показываем, являются базовые дифференциальные уравнения и их интегралы как функции Гамильтона.

Система (16) содержит параметры и имеет единственный рациональный интеграл

$$\mathfrak{A}^4 = \boldsymbol{A}^4 \frac{\vartheta_3^4}{\vartheta_2^4} - \boldsymbol{B}^4 \frac{\vartheta_4^4}{\vartheta_2^4} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d}{d\tau}\mathfrak{A} \equiv 0, \tag{18}$$

который очевидно трактовать как обобщение знаменитого тождества Якоби $\vartheta_3^4(\tau) = \vartheta_2^4(\tau) + \vartheta_4^4(\tau)$. Его возникновение в решаемых физических моделях уже давно стало классическим фактом[8] и используется повсеместно. В **§5.2** рассматривается связь уравнений (16) с малоизвестной динамической системой Якоби

$$\frac{\partial A}{\partial h} = 2A^2B, \qquad \frac{\partial a}{\partial h} = -16bA^2, \qquad \frac{\partial B}{\partial h} = bA^3, \qquad \frac{\partial b}{\partial h} = abA^2$$

и дается общее решение обеих систем. Переход и преобразования между ними оказывается далеко не очевидным, хотя обе интегрируемы в η, ϑ-рядах (13).

[8] Каку М. *Введение в теорию суперструн.* Мир: Москва (1999).

Процедуры интегрирования выявляют общую рецептуру получения оставшихся трансцендентных многозначных интегралов и даже полную лагранжеву и гамильтонову схемы описания уравнений. Они предъявлены в §**5.3**. Получению интегралов некоторых известных следствий уравнений (16) было посвящено много работ, но они так и не были найдены. Мы выписываем полные наборы интегралов для этих следствий. По причине важности уравнений (16) приведем их гамильтонову формулировку. Обозначим

$$\mathscr{U}(\vartheta,\eta) := \frac{\mathrm{i}}{\pi}\left\{\eta + \frac{\pi^2}{12}\big(\vartheta_3^4 + \vartheta_4^4 - 3\boldsymbol{B}^4\vartheta_4^4\big)\right\}\vartheta_3,$$

$$\mathscr{V}(\vartheta,\eta) := \frac{\mathrm{i}}{\pi}\left\{\eta + \frac{\pi^2}{12}\big(\vartheta_3^4 + \vartheta_4^4 - 3\boldsymbol{A}^4\vartheta_3^4\big)\right\}\vartheta_4,$$

$$\mathscr{W}(\vartheta,\eta) := \frac{\mathrm{i}}{\pi}2\eta^2 - \frac{\pi^3}{72}\mathrm{i}\big\{\vartheta_3^8 + \big(9\boldsymbol{A}^4\boldsymbol{B}^4 - 6\boldsymbol{A}^4 - 6\boldsymbol{B}^4 + 2\big)\vartheta_3^4\vartheta_4^4 + \vartheta_4^8\big\}.$$

Тогда *система* (16) *может быть представлена в гамильтоновой форме*:

$$\begin{pmatrix}\dot\vartheta_2\\ \dot\vartheta_3\\ \dot\vartheta_2\\ \dot\eta\end{pmatrix} = \vartheta_2\underbrace{\begin{pmatrix}0 & \mathscr{U} & \mathscr{V} & \mathscr{W}\\ -\mathscr{U} & 0 & 0 & 0\\ -\mathscr{V} & 0 & 0 & 0\\ -\mathscr{W} & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}}_{\Omega}\begin{pmatrix}\mathscr{H}_{\vartheta_2}\\ \mathscr{H}_{\vartheta_3}\\ \mathscr{H}_{\vartheta_4}\\ \mathscr{H}_{\eta}\end{pmatrix}$$

с гамильтонианом

$$\mathscr{H}(\vartheta_2,\vartheta_3,\vartheta_4,\eta) = \frac{1}{4}\ln\left(\boldsymbol{A}^4\frac{\vartheta_3^4}{\vartheta_2^4} - \boldsymbol{B}^4\frac{\vartheta_4^4}{\vartheta_2^4}\right)$$

и вырожденной скобкой Пуассона $\Omega(\vartheta,\eta)$.

В заключении главы (§**5.4**) мы описываем схему получения новых версий формул следов для конечнозонных операторов на частном примере

$$\Psi''' + u(x)\Psi' - \frac{1}{2}u'(x)\Psi = \lambda\Psi,$$

являющимся разновидностью (8). Во всех случаях формулы имеют трансцендентный характер, а в рассматриваемом случае выводим

$$u(x) = -\frac{\mathrm{i}c^{\frac{3}{2}}\big\{\vartheta_2^8(\tau) + \vartheta_3^8(\tau) + \vartheta_4^8(\tau)\big\}\mathfrak{a}}{\big\{\vartheta_2^4(\tau) + \vartheta_3^4(\tau)\big\}\big\{\vartheta_4^4(\tau) - \vartheta_2^4(\tau)\big\}}, \tag{19}$$

где под τ и символом $\mathfrak{a}$ следует понимать функции

$$\tau(x) = \widehat{\mathscr{M}}\left(\mathrm{i}\frac{P^{\mathrm{o}}_{-1/6}(-\mathfrak{a})}{P^{\mathrm{o}}_{-1/6}(\mathfrak{a})}\right), \qquad \mathfrak{a}(x) = \frac{27\mathrm{i}}{2c^{\frac{3}{2}}}\left\{\sum\nolimits_k \gamma_k^2(x) + E_1\right\}.$$

символом $\widehat{\mathscr{M}}$ обозначена операция приведения числа в фундаментальную область модулярной группы $\mathbf{\Gamma(1)}$, E_1 — один из интегралов стационарного уравнения Новикова, c — свободная константа и $k = 1, \ldots, 4$. Мы высказываем гипотезу о том, что в общих тэта-константах выражаемы конечнозонные потенциалы для произвольных спектральных задач. Прямая проверка такого рода утверждений не только не возможна без описанных дифференциальных θ, ϑ-свойств, но и даже с их учетом является очень нетривиальным упражнением; это относится и к формуле (19).

Глава 6 использует новые результаты из теории шестого трансцендента Пенлеве $\mathcal{P}_6$:

$$y_{xx} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{y-1} + \frac{1}{y-x}\right)y_x^2 - \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y-x}\right)y_x + \\ + \frac{1}{2}\frac{y(y-1)(y-x)}{x^2(x-1)^2}\left\{\alpha - \beta\frac{x}{y^2} + \gamma\frac{x-1}{(y-1)^2} - \left(\delta - \tfrac{1}{2}\right)\frac{x(x-1)}{(y-x)^2}\right\}$$

и структурно характеризуется следующим образом (§§**6.1**–**2**). Используя известные общие решения этого уравнения, выделяется подкласс алгебраических (многозначных) решений $y(x)$, т. е. когда x и y связаны полиномиальным соотношением $F(x, y) = 0$. Они допускают явную параметризацию и приводят, после подключения дифференциального аппарата тэта-функций, к большому количеству следствий, среди которых встречаются нетривиальные гиперэллиптические кривые. Последние же являются центральными объектами конечнозонной теории уравнения (1); она требует, как мы подчеркнули выше, эксплуатации методов униформизации.

Имеется только два случая, разделенные интервалом в более чем сто лет, когда уравнение $\mathcal{P}_6$ решается в общем виде. Это случай Пикара $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$ и случай Хитчина $\alpha = \beta = \gamma = \delta = \frac{1}{8}$. В оригинальной форме решение Хитчина малопригодно на практике в силу своей сложности, но существует его очень простая версия. При произвольных константах A, B, она имеет вид

$$y = \frac{\sqrt{x}}{\theta_1^2}\left\{\frac{\pi\vartheta_2^2 \cdot \theta_2\theta_3\theta_4}{\theta_1' + \pi \mathrm{i} A\theta_1} - \theta_2^2\right\}, \tag{20}$$

где функции θ_1', θ_k следует понимать как θ_1', $\theta_k\Big(A\frac{\mathsf{K}(\sqrt{x})}{\mathsf{K}'(\sqrt{x})} + B\Big|\mathrm{i}\frac{\mathsf{K}(\sqrt{x})}{\mathsf{K}'(\sqrt{x})}\Big)$ и $\vartheta_2 = \vartheta_2\Big(\mathrm{i}\frac{\mathsf{K}(\sqrt{x})}{\mathsf{K}'(\sqrt{x})}\Big)$, а K и K' — полные эллиптические интегралы Лежандра.

Поскольку современный интерес к уравнению $\mathcal{P}_6$ связан с открытием решения Хитчина, оно, как и родственные с ним, часто называются космологическими метриками. Однако степень универсальности уравнения $\mathcal{P}_6$ почти такая же как и у интегрируемых уравнений; оно появляется в тех же моделях, которые упоминались выше: гравитация, поля Янга–Милса и др. Математическая фундаментальность $\mathcal{P}_6$ не меньшая; эллиптические и все элементарные функции являются его частными решениями. Алгебраические решения получаются ограничением $(A, B) = \left(\frac{\nu}{N}, \frac{\mu}{N}\right)$ с целыми (ν, μ, N) и, поскольку

$$x = \frac{\vartheta_3^4(\tau)}{\vartheta_4^4(\tau)},$$

мы получаем бесконечную нетривиальную (род $g > 1$) серию явно униформизированных алгебраических соотношений $F(x, y) = 0$ — решений Хитчина. Дифференциальный аппарат уже описан выше, поэтому все необходимые уравнения выводимы в явном виде и среди них возникают, в большом количестве, те, которые связаны с гиперэллиптическими (конечнозонными) кривыми. Перечисление примеров отнесено в гл. 7. Но не только этот факт связывает конечнозонную теорию с уравнением $\mathcal{P}_6$. Более глубокой по природе оказывается следующая прямая аналогия с конечнозонным классом (**§6.3**).

Все конечнозонные потенциалы известных спектральных задач представимы либо как отношения тэта-функций, либо как логарифмические производные от таких функций:

$$y \sim \frac{\Theta_2}{\Theta_1}, \qquad \sim \frac{d}{dx}\ln\frac{\Theta_2}{\Theta_1}, \qquad \sim \frac{d^2}{dx^2}\ln\Theta_1, \qquad \ldots .$$

Причина в том, что с аналитической точки зрения решения всех рассматриваемых уравнений всегда имеют сингулярности, но при переходе к такого рода представлениям — методы тау-функции — задача сводится к построению расширений понятия Θ-функции: так называемых $\boldsymbol{\tau}$-функций. Такие объекты являются *целыми* функциями и фундаментальны и теоретически и в числовом анализе, поскольку они нигде не имеют особенностей, кроме бесконечно удаленной точки. Следовательно, даже если не удается найти аналитическое решение, уравнения на эти функции сравнительно легко интегрируются численно. Впервые $\boldsymbol{\tau}$-форма решений была найдена в [4], соответствует решению Хитчина, оказалась очень нетривиальной, пока единственно известной, а распределение полюсов — тоже аналитически описываемое — являет красивую демонстрацию сложности решений. Точнее, хитчиновское решение (20) представимо в виде

$$y = 2x(1-x)\frac{d}{dx}\ln\frac{\theta_1'\big(A\frac{K}{K'} + B\big|\mathrm{i}\frac{K}{K'}\big) + 2\pi A\cdot\theta_1\big(A\frac{K}{K'} + B\big|\mathrm{i}\frac{K}{K'}\big)}{\sqrt{1-x}\,K'\cdot\theta_1\big(A\frac{K}{K'} + B\big|\mathrm{i}\frac{K}{K'}\big)}, \tag{21}$$

где приняты обозначения $K := \mathsf{K}(\sqrt{x})$ и $K' := \mathsf{K}'(\sqrt{x})$, а характерная картина распределения одной из серии его полюсов изображена на Рис. 2. На ней хорошо выявляется проблема контроля особенностей решений. В частности, при попытке численного интегрирования уравнения с «неудачными» начальными данными можно «наталкиваться» на особенности, расположение и число которых совершенно не предсказуемо; такие точки далее невозможно «преодолеть». Уравнение $\mathcal{P}_6$ в этом отношении является наиболее сложным, но при параметрах Хитчина решаемым, случаем.

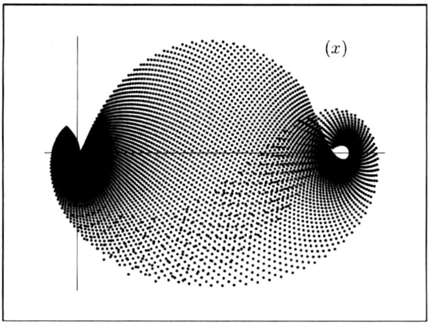

Рис. 2. Распределение (неполное) полюсов решения (21) при $A = 125.45 - 103.29\mathrm{i}$, $B = 36.710 - 69.980\mathrm{i}$.

Глава 7 нацелена на решение наиболее трудных составляющих рассматриваемого круга проблем. Ни один конечнозонный потенциал не выражаем в элементарных функциях, всегда связан с римановой поверхностью рода $g > 1$ и не ясно как строить в явном виде однозначные функции на ней. Случай $g = 1$ слишком прост и не показателен. Формулы главы 1 и дисперсионные соотношения типа (9) говорят, что анализ неизбежно будет включать полный набор абелевых интегралов.

С прикладной точки зрения проблема состоит в «борьбе с многозначностями» и поэтому для всех возникающих функций необходимо иметь однозначные τ-представления на римановой поверхности алгебраического соотношения (2). Мотивируя начало рассмотрения примерами из эллиптической теории, в **§7.1** мы излагаем новый взгляд на эту проблему, фокусируя внимание на уравнениях, которым удовлетворяют перечисленные выше объекты. Традиционно используемые линейные дифференциальные уравнения класса Фукса $Y_{xx} = \boldsymbol{\mathcal{Q}}(x, y)Y$, где x и y связаны алгебраическим соотношением $F(x, y) = 0$, следует заменить на непосредственно дифференциальное *автономное* уравнение 3-го порядка, которому удовлетворяет любая из униформизирующих функций, например, $x = \varphi(\tau)$:

$$[x, \tau] = \boldsymbol{\mathcal{Q}}(x, y), \qquad [x, \tau] := \frac{\dddot{x}}{\dot{x}^3} - \frac{3}{2}\frac{\ddot{x}^2}{\dot{x}^4}.$$

После этого (**§7.2**) мы показываем, что такие уравнения с алгебраическими коэффициентами на самом деле избыточны и можно ограничится уравнениями с рациональными коэффициентами $[x, \tau] = \boldsymbol{\mathcal{Q}}(x)$. Это свойство не просто существенное упрощение, а фундаментальный факт. Для любого алгебраического соотношения всегда имеется автоморфная функция $x = \wp(\tau)$, которая не только удовлетворяет таким уравнениям, но и является одной из образующих. Более того, уравнения имеют единообразную форму

$$[x,\tau] = \varkappa\left\{\sum_{s=1}^{2g+1}\frac{1}{(x-e_s)^2} - \frac{2gx^{2g-1}+\mathscr{A}(x)}{(x-e_1)\cdots(x-e_{2g+1})}\right\}, \tag{22}$$

в котором $\varkappa = -\frac{1}{2}$ или $\varkappa = -\frac{3}{8}$, а $\mathscr{A}(x)$ — стандартный акцессорный полином. Далее мы показываем — нетривиальный и важный результат, что вид функции $x = \wp(\tau)$ может быть задан в форме Θ-функционального анзаца

$$x(\tau) = \mathrm{const}\cdot\frac{\Theta[^{\alpha}_{\beta}]^2(\mathfrak{U}(\tau))}{\Theta[^{\gamma}_{\delta}]^2(\mathfrak{U}(\tau))}, \tag{23}$$

а абелевы интегралы, кроме голоморфных $\mathfrak{U}(\tau)$, тоже выражаемы через Θ-функции. Мы излагаем методику и (гиперэллиптические) примеры (§§ **7.2–3**), когда мероморфные и логарифмические интегралы выражаемы/вычисляемы через функции Якоби. Это пока единственные случаи — имея еще в виду уравнения вида (22), когда теория становится эффективной. Последний и ключевой шаг в построении — дифференциальные уравнения на голоморфные интегралы $\mathfrak{U}(\tau)$. Они оказываются дифференциально замкнутыми по отношению к операции $x \mapsto [x,\tau]$. А именно, имеет место следующий результат.

- *Базис голоморфных абелевых интегралов $\{\mathfrak{U}_k\}$ удовлетворяет системе автономных обыкновенных дифференциальных уравнений*

$$\boxed{[\mathfrak{U}_1,\tau] = \Xi_1(\mathfrak{U}_1,\ldots,\mathfrak{U}_g;\mathscr{A}), \quad \ldots\ldots, \quad [\mathfrak{U}_g,\tau] = \Xi_g(\mathfrak{U}_1,\ldots,\mathfrak{U}_g;\mathscr{A}),}$$

где Ξ_k (вычисляемые) трансцендентные функции, зависящие линейно от акцессорных параметров $\mathscr{A}$.

Роль этих уравнений фундаментальна. Как только они выведены — это зависит от вида соотношения $F(x,y) = 0$ — и получены их решения $\mathfrak{U}_k = \mathfrak{U}_k(\tau)$, вся (предыдущая) теория превращается в набор аналитически вычисляемых «рецептов», т. е. как это имеет место в теории эллиптических функций. Поскольку до недавнего времени, такие уравнения не только не решались, но и не рассматривались и не выводились, представляется чрезвычайно важным найти случаи, точно решаемые в терминах уже известных функций. Такие примеры найдены, но мы разбираем подробно только один из них. Он соответствует гиперэллиптическому (конечнозонному) соотношению $y^2 = x^5 - x$.

Обозначим голоморфные абелевы интегралы как $\mathfrak{u}_\pm(\tau)$. Тогда при их «удачной» нормировке они удовлетворяют одному автономному дифференциальному уравнению:

$$[\mathfrak{u}_\pm, \tau] = -\frac{1}{2}\wp(\mathfrak{u}_\pm) - \frac{1}{2}\wp(\mathfrak{u}_\pm - \omega_\pm) - \frac{1}{2}\wp(\mathfrak{u}_\pm - \omega'_\pm) - \\ -\frac{3}{8}\wp(\mathfrak{u}_\pm - \varkappa_\pm) - \frac{3}{8}\wp(\mathfrak{u}_\pm + \varkappa_\pm) - \frac{81}{4}\frac{7 \pm 5\sqrt{2}}{\wp(\mathfrak{u}_\pm) - \wp(\varkappa_\pm)} + \frac{27}{8}(\sqrt{2} \pm 2),$$

где $\omega_\pm$ и $\omega'_\pm$ — полупериоды теории Вейерштрасса для уравнения $\wp'(\mathfrak{u})^2 = 4\wp^3(\mathfrak{u}) - 30\wp(\mathfrak{u}) \pm 28$. Уравнение на $\mathfrak{u}_\pm$ точно решаемо:

$$\mathfrak{u}_\pm(\tau) = \frac{e^{-\frac{\pi}{8}i}}{\sqrt{6}}\left\{\frac{\Gamma\left(\frac{1}{8}\right)\Gamma\left(\frac{3}{8}\right)}{4\sqrt{\pi}}\left[\sin\left(\tfrac{1}{8}\pi\right) \pm i\sqrt{i}\sin\left(\tfrac{3}{8}\pi\right)\right] + \right. \\ \left. + 2\frac{\vartheta_4(2\tau)}{\vartheta_3(\tau)}\left[\frac{i}{3}\frac{\vartheta_4(\tau)}{\vartheta_3(\tau)}\cdot {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{8}; \frac{11}{8}\middle|\frac{\vartheta_4^4(\tau)}{\vartheta_3^4(\tau)}\right) \pm \sqrt{i}\cdot {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{8}; \frac{9}{8}\middle|\frac{\vartheta_4^4(\tau)}{\vartheta_3^4(\tau)}\right)\right]\right\},$$

где ${}_2F_1(a, b; c|z)$ — стандартная гипергеометрическая функция. Даже с учетом описанного выше дифференциального «тэта-аппарата» прямая проверка этого решения является в высшей степени нетривиальным упражнением; оно тестировалось численно на генераторе произвольных чисел.

После того как получены формулы такого сорта, функции и абелевы интегралы теории выражаются через $\mathfrak{u}(\tau)$ как аргументы θ, θ'_1-функций. Например, в дисперсионном соотношении (9) величины $\mathfrak{u}_{1,2}$ заменяются на линейные комбинации $\mathfrak{u}_\pm(\tau)$, λ заменяется на $\frac{\vartheta_4(\tau)}{\vartheta_3(\tau)}$, а μ — на $4i\frac{\eta^3(2\tau)}{\vartheta_3^3(\tau)}$, где $\boldsymbol{\eta}$ — функция Дедекинда.

Помимо мотиваций и примеров, в рамках изложенного материала, в **§7.3** мы даем также геометрически инвариантную переформулировку собственно теории классической униформизации, поскольку, и это важный пункт, фуксовыми уравнениями дело не ограничивается. Переход к высшим родам значительно сложнее, чем эллиптический случай. Дифференциальные уравнения становятся уравнениями 3-го порядка вместо 1-го. Отсюда следует, что необходимо вводить как равноправные объекты не только скалярные функции, дифференциалы и интегралы, но и геометрическую связность $\Gamma(\tau)$. Более того, для нее необходимо установить τ-представление закона преобразования (автоморфное свойство) и дифференциальные уравнения. Все эти результаты получены и явно описаны. Например, показано, что τ-представление любой связности на римановой поверхности удовлетворяет некоторому обыкновенному автономному дифференциальному уравнению 3-го порядка

$$\Xi(\dddot{\Gamma}, \ddot{\Gamma}, \dot{\Gamma}, \Gamma) = 0$$

и предъявлен общий алгоритм вывода таких уравнений. В рамках геометрически целостного взгляда на теорию естественно устанавливается полный комплект функций, необходимый для замкнутости построений как в x- так и в τ-представлении:

$$\{\Psi_1(x),\ \Psi_2(x),\ \Psi_1'(x)\} \quad \Longleftrightarrow \quad \{\wp(\tau),\ \dot{\wp}(\tau),\ \Gamma(\tau)\}.$$

В **§7.4** мы приводим большое количество примеров и способы получения новых на основе полученных ранее параметризаций алгебраических решений Пикара–Хитчина. Этот материал, помимо прямой прикладной значимости, имеет и самостоятельное ценность. До недавнего времени теория униформизации была лишена содержательных нетривиальных примеров. Заметим, что мы отталкиваемся от алгебраических решений Хитчина, но используем и тот факт, что они есть частный случай общего, которое известно. Без последнего свойства мы бы не могли привлечь теорию униформизации, а без последующего использования тэта-аппарата невозможно было бы прийти к гиперэллиптическим конечнозонным следствиям и довести их до полной решаемости. Имеется большое количество случаев уравнения $\mathcal{P}_6$ с алгебраическими решениями, для которых его общее решение, однако, не известно. Отсутствие их параметризации в $\boldsymbol{\theta}$ не дало бы возможности продвинуться в следствиях. Выражаясь описательно, «конечная форма» решений рано или поздно востребует явную униформизацию.

В **Приложении** изложены определения и важные свойства θ-функций и функций Вейерштрасса. Стандартный материал не воспроизводится, а делается акцент на новых результатах (**п. А1–2**). Например, приводится формула модулярного преобразования θ-функций и закон преобразования производных $\theta'_{\alpha\beta}$. Для вейерштрассова базиса $\{\sigma, \zeta, \wp, \wp'\}$ выписаны правила дифференциального исчисления по периодам (ω, ω') и они приводят к одной нетривиальной динамической системе. В **п. А3** мы излагаем новый способ построения эллиптических функций, который в принципе не отличается от ситуаций с высшими родами и также как и там (§7.1) основывается на θ-анзаце (23). Действуя по такой схеме мы не только воспроизводим известную часть теории, но и получаем ее расширение. В частности, мы предъявляем *все* способы параметризации эллиптических кривых вида $y^2 = 4(x-e)(x-e')(x-e'')$. По причине большой важности эллиптической теории приведем эти уравнения:

$$[x,\tau] = -\frac{3}{8}\left\{\frac{1}{(x-e)^2} + \frac{1}{(x-e')^2} + \frac{1}{(x-e'')^2} - \frac{2x+0}{(x-e)(x-e')(x-e'')}\right\}$$
$$x = \wp(\tau|\omega,\omega')$$

(подразумевается, что $e+e'+e''=0$) и

$$[x,\tau] = -\frac{3}{8}\left\{\frac{1}{(x-e)^2} + \frac{1}{(x-e')^2} + \frac{1}{(x-e'')^2} - \frac{2x-\frac{1}{3}\pi^2(n\omega+m\omega')^{-2}}{(x-e)(x-e')(x-e'')}\right\},$$
$$x = \wp\Big(\frac{n\omega+m\omega'}{\pi\mathrm{i}}\ln\tau\,\Big|\,\omega,\omega'\Big),$$

где n, m — целые числа; соответственно, униформизирующие функции x образуют дискретное (n,m)-семейство x_{nm}. Здесь всюду τ определено с точностью до дробно-линейного преобразования, поэтому термин двоякая периодичность для первого случая достаточно условен, а для второго он и вовсе никогда не применим. Таким образом везде где возникают соотношения рода $g=1$ равноправно может использоваться любая из этих форм, не только общепринятая $\wp(\tau|\omega,\omega')$.

В **п. А4** мы излагаем подробности, используемые при выводе новых трансцендентных формул следов типа (19). Они требуют формульно аналитического решения модулярных задач обращения, которое для классической формы Вейерштрасса $y^2 = 4x^3 - ax - b$ отсутствовало, а в русскоязычной литературе для нахождения полупериодов (ω,ω') имеются даже некорректные изложения. Правильное и формульное решение таково. При заданных коэффициентах (a,b), модуль $\tau = \omega'/\omega$ эллиптической кривой дается выражением

$$\tau = \mathrm{i}\frac{P^{0}_{-1/6}(-\sqrt{\mathfrak{g}})}{P^{0}_{-1/6}(\sqrt{\mathfrak{g}})}, \qquad \mathfrak{g} := 27\frac{b^2}{a^3},$$

где P и Q — стандартные функции Лежандра.

В качестве следствий мы приводим несколько сопутствующих результатов технического характера. Они часто оказываются важными, поскольку на практике требуются аналитические формулы, а не схемы решений. Например, мы даем более простое представление для корней алгебраических уравнений 4-й степени и бирациональный переход от якобиевских функций sn, cn и dn к вейерштрассову базису $(\wp, \wp')$.

Публикации по теме диссертации

[1] Брежнев Ю. В. *Базисы Грёбнера в теории эллиптических солитонов для спектральных задач 3-го порядка.* Симметрия и дифференциальные уравнения. Труды межд. конф. Красноярск (2000), 53–56.

[2] Брежнев Ю. В. *Об уравнениях Дубровина для конечнозонных операторов.* Успехи мат. наук (2002) **57**(2), 191–192.

[3] Брежнев Ю. В. *Конечнозонные потенциалы с тригональными кривыми.* Теор. мат. физика (2002) **133**(3), 398–404.

[4] Брежнев Ю. В. *О $\boldsymbol{\tau}$-функциональном решении 6-го трансцендента Пенлеве.* Теор. мат. физика (2009) **161**(3), 346–366.

[5] Брежнев Ю. В. *Трансцендентные формулы следов для конечнозонных потенциалов.* Теор. мат. физика (2010) **164**(1), 108–118.

[6] Брежнев Ю. В. *Эллиптические солитоны, фуксовы уравнения и алгоритмы.* Алгебра и анализ (2012) **24**(4), 34–63.

[7] Брежнев Ю. В., Зайцев А. А., Сазонов С. В. *К аналитической теории явления суперкомпенсации.* Биофизика (2011) **56**(2), 342–348.

[8] Брежнев Ю. В., Сазонов С. В. *О движении слабоперетормиженных нелинейных осцилляторов.* Изв. РАН. Физика (2012) **76**(12), 1447–1451.

[9] Устинов Н. В., Брежнев Ю. В. *О Ψ-функции для конечнозонных потенциалов.* Успехи мат. наук (2002) **57**(1), 167–168.

[10] Brezhnev Yu. V. *Elliptic solitons with free constants and their isospectral deformations.* Reports on Math. Physics (2001) **48**(1/2), 39–46.

[11] Brezhnev Yu. V. *Elliptic solitons and Gröbner bases.* Journ. Math. Physics (2004) **45**(2), 696–712.

[12] Brezhnev Yu. V. *On the uniformization of algebraic curves.* Moscow Math. Journ. (2008) **8**(2), 233–271.

[13] Brezhnev Yu. V. *What does integrability of finite-gap or soliton potentials mean?* Phil. Trans. Royal Society **A**: Math. Phys. Sciences (2008) **366**(1867), 923–945.

[14] Brezhnev Yu. V. *On uniformization of Burnside's curve $y^2 = x^5 - x$.* Journ. Math. Physics (2009) **50**(10), 103519(1–23).

[15] BREZHNEV YU. V. *On unformizable representation for Abelian integrals.* Painlevé Equations and Related Topics (eds: A. Bruno, A. Batkhin), 199–208. De Gruyter (2012).

[16] BREZHNEV YU. V. *Spectral/quadrature duality: Picard–Vessiot theory and finite-gap potentials.* Algebraic aspects of Darboux transformations, quantum integrable systems and supersymmetric quantum mechanics (eds: P. Acosta-Humánez, F. Finkel, N. Kamran, P. Olver). Contemporary Mathematics (2012) **563**, 1–31. Amer. Math. Soc.

[17] BREZHNEV YU. V. *The sixth Painlevé transcendent and uniformizable orbifolds.* Painlevé Equations and Related Topics (eds: A. Bruno, A. Batkhin), 193–198. De Gruyter (2012).

[18] BREZHNEV YU. V. *Non-canonical extension of θ-functions and modular integrability of ϑ-constants.* Proc. Royal Soc. Edinburgh (2013) **143**, 37–85.

[19] BREZHNEV YU. V. *A note on Chudnovsky's Fuchsian equations.* Journ. Diff. Equations (2012) **253**(12), 3727–3751.

[20] BREZHNEV YU. V., LYAKHOVICH S. L., SHARAPOV A. A. *Dynamical systems defining Jacobi's ϑ-constants.* Journ. Math. Physics (2011) **52**(11), 112704(1–21).

Подписано к печати 04.12.2012. Формат 60×84/16. Бумага «Снегурочка».
Печать XEROX. Усл. печ. л. 1,74. Уч.-изд. л. 1,58.
Заказ 1406-12. Тираж 80 экз.

Национальный исследовательский Томский политехнический университет
Система менеджмента качества
Издательства Томского политехнического университета сертифицирована
NATIONAL QUALITY ASSURANCE по стандарту BS EN ISO 9001:2008

ИЗДАТЕЛЬСТВО ТПУ. 634050, г. Томск, пр. Ленина, 30
Тел/факс: +7 (3822) 56-35-35, www.tpu.ru

10 2